

一种散乱点双三次多项式自然样条插值*

关履泰¹, 许伟志¹, 朱庆勇²

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275;

2. 中山大学工学院海洋研究中心, 广东 广州 510275)

摘 要: 考虑对空间散乱点的一种双三次多项式样条插值, 使得插值函数对 x 与对 y 的二阶偏导数平方积分小(带自然边界条件)。用希氏空间样条方法, 得出其解可表为一个双一次多项式与分片双三次多项式之和。它的系数能够用线性代数方程组确定, 方程组系数矩阵对称, 可用改进的平方根法解。例子表明方法简单, 效果良好。

关键词: 散乱数据插值; 双三次多项式; 自然样条

中图分类号: TP391.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 05-0001-04

从上世纪 60 年代开始, 大规模散乱数据曲面拟合广泛用于数据压缩、汽车外形设计、船体放样、飞机机翼机身设计、服装设计、地质探矿、医学图像处理等许多方面, 就受到众多研究工作者的关注^[1-7]。原始的 Shepard 方法(1968)模型粗糙限制了它的应用。数值逼近与计算几何的研究人员受一元的 B 样条启发提出了薄板样条(Thin Plate Splines)、箱样条(Box Splines)、单纯形样条(Simplex Splines)、光滑余因子^[2]、顶点样条(Vertex Splines)与有限元(Finite Element Method)、B 网(B Net)、BB 曲面(Bernstein-Bezier Surfaces)、多项式自然样条与三角剖分方法、重分算法等, 近年 Lai 等^[8-12]有许多工作。但是对大规模散乱数据的多元插值问题的解决都不够理想。计算机的实用算法还有: Δ 迭代, 细分算法, 层次 B 样条, 径向基函数法(Radial Basis Functions), B 网方法, 软件 Rhinoceros、3DS MAX、Poser、Maya、Matlab 和 Scilab、VRML 及 Web3D 等的曲面片(Patch), 多边形(Polygon), NURBS 曲面造型技术等等, 它们都没有目标泛函极小的性质^[7-8]。1989 年, 李岳生、关履泰研究了广义混合样条函数空间矩形域带连续边界条件和离散边界条件的多元散乱数据最优插值问题。Chui 与关履泰在 1993 年, 把二元的结果全面地推向一般多元情形。1997 年, 关履泰研究类似 B 样条的局部支撑基函数。2003 年, 有关这种局部支撑基的性质及插值自然样条的算法发表。但是这类样条的目标泛函比较复

杂, 带有一系列的积分项^[3-6]。本文给出一种目标泛函简单、更符合实际的双三次 Hilbert 空间自然样条, 其算子 T 的核是双一次多项式空间, 散乱点自然插值样条解与以前的不同, 有良好的边界条件与简单的表达式, 使得求解方便。

1 散乱点双三次自然样条

给定 N 个散乱数据点与其值

$\{(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, N\}$ 。设

$$X = H^{2,2}(\mathbf{R}) =$$

$\{u(x, y) \mid \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\mathbf{R}), \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \text{ 是绝对连续函数},$

对 $\alpha = 0, 1, \beta = 0, 1$ 成立, $(x, y) \in \mathbf{R}\}$

$Y = L_2(\mathbf{R})$, $T: X \rightarrow Y$ 是一个从 X 到 Y 的线性

算子, 定义为 $T(u) = u^{(2,2)}(x, y) = \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2}$

带自然边界条件

$$u^{(2,v)}(x, c) = \frac{\partial^{2+v} u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^v} \Big|_{y=c} = 0, v = 0, 1$$

可以写成 $u^{(2,0)}(x, c) = u^{(2,1)}(x, c) = 0$

$$u^{(\mu,2)}(a, y) = \frac{\partial^{\mu+2} u(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^2} \Big|_{x=a} = 0, \mu = 0, 1$$

可以写作 $u^{(0,2)}(a, y) = u^{(1,2)}(a, y) = 0$ 。

记 $Z = \mathbf{R}^N$ 是 N 维欧几里得空间。令

$z = (z_1, \dots, z_N)$, $A: X \rightarrow Y$ 是一个插值算子

$$Au = (u(x_1, y_1), \dots, u(x_N, y_N))$$

我们考虑以下的在希尔伯特空间 $H^{2,2}(\mathbf{R})$ 中的样条

* 收稿日期: 2008-04-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572154); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-06-0731)

作者简介: 关履泰(1946年生), 男, 教授, 博士生导师; 通讯联系人: 许伟志; E-mail: xwz_jly@126.com

插值问题。也称之为散乱点双三次自然样条插值问题,问题的解称之为双三次散乱点自然样条。

问题 寻找一个函数 $\sigma(x, y) \in X$, 满足

$$\|T\sigma\|^2 = \min_{u \in X, Au=z} \{\|Tu\|^2\}$$

这里, $\|Tu\|^2 = \iint_R (u^{(2,2)}(x, y))^2 dx dy$

带边界条件

$$u^{(2,0)}(x, c) = u^{(2,1)}(x, c) = 0$$

$$\text{和} \quad u^{(0,2)}(a, y) = u^{(1,2)}(a, y) = 0$$

定理 1 算子 T 的化零子空间满足

$$N(T) = P\langle 2, 2 \rangle =$$

$$\{u \mid u(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy\}$$

证明 直接验证可知, 如果

$u(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy$, c_{ij} 是任意实数, 那么 $u^{(2,2)}(x, y) = 0$ 而且 $u^{(2,v)}(x, y) = u^{(\mu,2)}(x, y) = 0$ 满足边界条件。所以这时 $u \in N(T)$ 。

如果 $u \in N(T)$, 则 $u^{(2,2)}(x, y) = 0$, 而且在边界上

$$u^{(2,0)}(x, c) = u^{(2,1)}(x, c) =$$

$$u^{(0,2)}(a, y) = u^{(1,2)}(a, y) = 0$$

从而可以写出: $u(x, y) = g_0(y) + g_1(y) \cdot x$

用边界条件有

$$0 = u^{(0,2)}(a, y) = g''_0(y) + g''_1(y) \cdot a$$

$$0 = u^{(1,2)}(a, y) = g'_1(y)$$

推出: $g_1(y) = b_0 + b_1y$; 结果代入前一个式子又得 $g''_0(y) = 0$, 从而 $g_0(y) = d_0 + d_1y$ 。把它代回 u 的表达式, 得证。

定理 2 双三次散乱点自然样条 $\sigma(x, y)$ 具有如下的显式及紧凑格式的表达式:

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i(x, y) + c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy$$

其中 c_{ij} 及 λ_i 是由插值条件确定的实数

$g_i(x, y) = G(x_i, a; x)G(y_i, c; y)$, $i = 1, \dots, N$ 是双三次自然样条基函数, 并且有

$$G(r_i, t; \tau) \equiv \frac{(r_i - \tau)_+^3}{3!} + c_0(r_i, t) + c_1(r_i, t)\tau,$$

$$r_i = x_i, t = a, \tau = x \text{ 或者 } r_i = y_i, t = c, \tau = y,$$

$$c_0(r_i, t) = -\left(\frac{(r_i - t)_+^2 t}{2!} + \frac{(r_i - t)_+^3}{3!}\right)$$

$$c_1(r_i, t) = \frac{(r_i - t)_+^2 t}{2!}$$

证明 由 Hilbert 空间样条函数理论, 已经有结果:

如果 $\sigma(x, y)$ 是 Hilbert 空间插值样条函数解, 则对任意的 $v \in N(T)$, 有 $\langle T^* T \sigma, v \rangle = 0$, T^* 是 T 的

共轭算子; 并且存在系数 λ_i 与 $k_i \in X$ 使得

$$T^* T \sigma = \sum_i \lambda_i k_i$$

现在, 该结论为

$$T^* T \sigma = \sum_{i=1}^N \lambda_i k_i; \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i^l y_i^l = 0, j = 0, 1, l = 0, 1$$

对任意 X 中的元素 u , 在 a 点 Taylor 展开, 再在 c 点展开 $u(a, y), u^{(1,0)}(a, y), u^{(2,0)}(\tau, y)$ 并注意边界条件, 对任意 X 中的元素 u 有

$$\langle T \sigma, Tu \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i, y_i) =$$

$$\iint_{a,c} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i (x_i - \tau)_+ (y_i - t)_+ \right) u^{(2,2)}(\tau, t) d\tau dt =$$

$$\langle TG, Tu \rangle$$

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i(x, y) + f(x, y), f(x, y) \in N(T)$$

其中 $g_i(x, y) = G(x_i, a; x)G(y_i, c; y)$, $i = 1, \dots, N$ 满足:

$$G''(x_i, a; x) = \frac{d^2 G(x_i, a; x)}{dx^2} = (x_i - x)_+$$

$$G''(y_i, c; y) = \frac{d^2 G(y_i, c; y)}{dy^2} = (y_i - y)_+$$

及边界条件:

$$g_i^{(2,0)}(x, c) = g_i^{(0,2)}(a, y) = g_i^{(2,1)}(x, c) =$$

$$g_i^{(1,2)}(a, y) = 0, i = 1, \dots, N$$

所以

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i(x, y) + c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy$$

其中 $g_i(x, y) = G(x_i, a; x)G(y_i, c; y)$, $i = 1, \dots, N$ 是双三次自然样条基函数, 并且有

$$G(r_i, t; \tau) \equiv \frac{(r_i - \tau)_+^3}{3!} + c_0(r_i, t) + c_1(r_i, t)\tau, r_i = x_i,$$

$$t = a, \tau = x \text{ 或者 } r_i = y_i, t = c, \tau = y$$

而其系数 $c_j(r_i, t)$ 由边界条件取得。

用边界条件 $g_i^{(2,0)}(x, c) = g_i^{(2,1)}(x, c) = 0, i = 1, \dots, N$;

从对 y 求一阶导数开始, 由上式推出

$$0 = \left(-\frac{(y_i - y)_+^2}{2!} + c_1(y_i, c; y) \right) \Big|_{y=c} =$$

$$-\frac{(y_i - c)^2}{2!} + c_1(y_i, c; y)$$

$$c_1(y_i, c; y) = \frac{(y_i - c)^2}{2!}$$

然后, 利用这个结果代入不求导数的式子中得到

$$0 = \frac{(y_i - c)^3}{3!} + c_0(y_i, c; y) + c \frac{(y_i - c)^2}{2!}$$

$$c_0(y_i, c; y) = -\frac{(y_i - c)^2}{2!}c - \frac{(y_i - c)^3}{3!}$$

同理可以得出另外一个式子, 得证。

2 散乱点双三次自然样条插值问题求解

定理3 如果相应的齐次插值问题只有恒零解, 则对任意散乱数据 $(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, N$, 双三次自然样条插值问题有唯一解, 可表示为:

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\frac{(x_i - x)_+^3}{6} - \frac{(x_i - a)^3}{6} + \frac{(x_i - a)^2(x - a)}{2} \right) \cdot \left(\frac{(y_i - y)_+^3}{6} - \frac{(y_i - c)^3}{6} + \frac{(y_i - c)^2(y - c)}{2} \right) + c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy, \quad c_{ij} \text{ 及 } \lambda_i \text{ 由下方程组确定}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T, C = (c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{11})^T,$$

$$Z = (z_1, \dots, z_N)^T, A = (a_{ij})_{N \times N},$$

$$B = (1, x_j, y_j, x_j y_j)_{N \times 4}, j = 1, \dots, N$$

$$a_{ij} = \left(\frac{(x_i - x_j)_+^3}{6} - \frac{(x_i - a)^3}{6} + \frac{(x_i - a)^2(x_j - a)}{2} \right) \cdot \left(\frac{(y_i - y_j)_+^3}{6} - \frac{(y_i - c)^3}{6} + \frac{(y_i - c)^2(y_j - c)}{2} \right)$$

证明 根据定理2结论和插值条件, 得到前 N 个方程。

注意在定理2的证明过程中, 已经得出:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 0$$

$$x_1 \lambda_1 + \dots + x_N \lambda_N = 0$$

$$y_1 \lambda_1 + \dots + y_N \lambda_N = 0$$

$$x_1 y_1 \lambda_1 + \dots + x_N y_N \lambda_N = 0$$

这就是后面4个方程。写成矩阵形式得证本定理。

定理4 解双三次自然样条插值的系数矩阵是对称的。

证明 只需证明 A 是对称的, 则由定理3求解双三次自然样条插值的系数矩阵的表达式即可得证。记

$$\alpha_{ij} = \frac{(x_i - x_j)_+^3}{6} - \frac{(x_i - a)^3}{6} + \frac{(x_i - a)^2(x_j - a)}{2}$$

$$\beta_{ij} = \frac{(y_i - y_j)_+^3}{6} - \frac{(y_i - c)^3}{6} + \frac{(y_i - c)^2(y_j - c)}{2}$$

则 $a_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \beta_{ij}$

只要证明 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, 就可以得出 A 是对称的。现在, 不妨假设 $x_i \geq x_j$, 这样,

$$\alpha_{ij} = \frac{(x_i - x_j)^3}{6} - \frac{(x_i - a)^3}{6} + \frac{(x_i - a)^2(x_j - a)}{2} = \frac{[(x_i - a) - (x_j - a)]^3}{6} - \frac{(x_i - a)^3}{6} + \frac{(x_i - a)^2(x_j - a)}{2} =$$

$$-\frac{(x_j - a)^3}{6} + \frac{(x_j - a)^2(x_i - a)}{2} = \alpha_{ji}$$

从而得出此定理。

此定理可以用改进的平方根法去解方程组。

3 算例

例 插值函数: $z = \cos(x) \times \cos(y)$

插值点区间: $[0, 4] \times [0, 4]$, 边界: $a = c = -1$, $b = d = 5$ 。点数分别为 301, 521, 1 000 的散乱数据分布如图1示, 运用双三次自然样条插值的结果

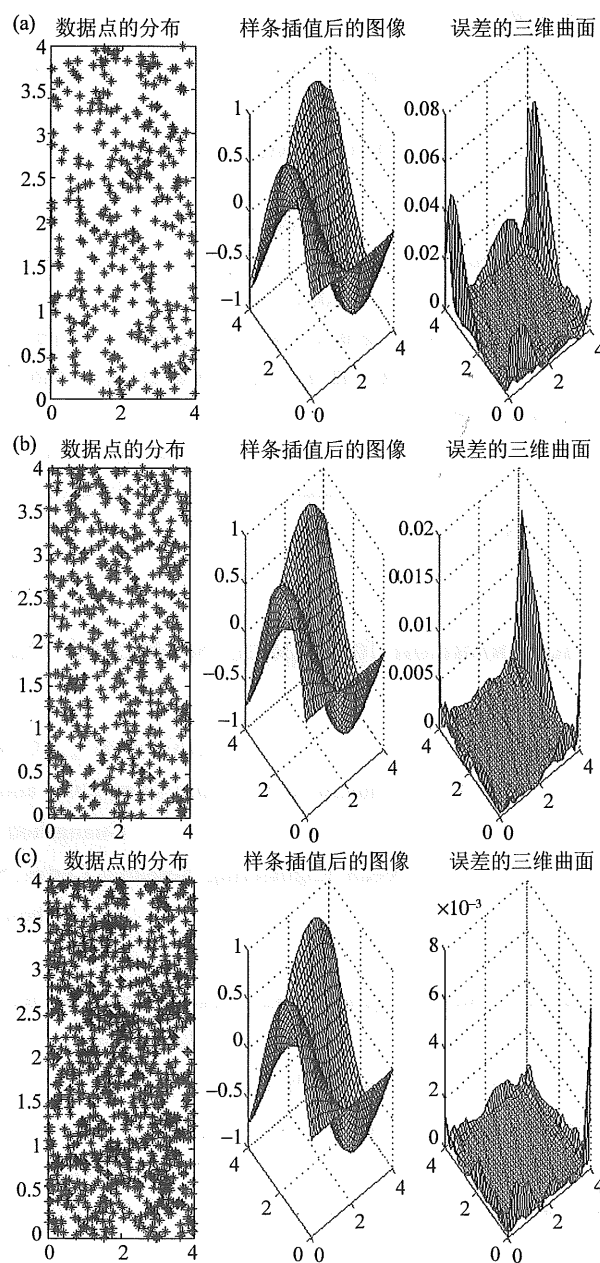


图1 插值点分别为 301 (a), 521 (b) 和 1 000 (c) 的散乱数据点, 插值后的图像和误差曲面

Fig. 1 Image of 301 (a), 521 (b) 和 1 000 (c) scattered data, its interpolant and error surface

以及误差分析。插值点个数为 301, 521 和 1 000 个, 其最大误差分别为 0.060 681, 0.015 787 和 0.006 467; 平均误差分别为 0.002 273, 0.000 351 和 0.000 102。

从实验结果来看, 数据插值拟合效果的好坏很大程度上取决于数据点的分布情况。为使得函数拟合的精度较高, 建议在数据采集时均匀地多选择一些点。

本文给出了一种散乱点双三次多项式自然样条插值解的结构。实验表明, 方法简单, 效果良好。

参考文献:

- [1] 唐泽圣. 三维数据场可视化[M]. 北京:清华大学出版社,1999.
- [2] 王仁宏. 多元样条函数及其应用[M]. 北京:科学出版社,1994.
- [3] GUAN Lutai, LIU Bin. Surface design by natural splines over refined grid points[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 163(1): 107 - 115.
- [4] 关履泰, 罗笑南, 黎罗罗, 等. 计算机辅助几何图形设计[M]. 北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,1999.
- [5] GUAN Lutai. Bivariate polynomial natural spline interpolation algorithms with local basis for scattered data[J]. J Comp Anal and Appl, 2003, 1: 77 - 101.
- [6] 关履泰, 覃廉, 张健. 用参数样条插值挖补方法进行大规模散乱数据曲面造型[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18 (3): 372 - 377.
- GUAN Lutai, QIN Lian, ZHANG Jian. Surface construction over large scale scattered data using parametric spline interpolation and hole filling approach [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18 (3): 372 - 377.
- [7] 刘斌. 细分网格下的散乱数据样条插值及其应用[D]. 广州:中山大学博士学位论文,2004.
- [8] LAI M J, SCHUMAKER L L. Spline Functions over Triangulations [M]. London: Cambridge University Press, 2007.
- [9] ZHOU Tianhe, HAN Danfu, LAI Mingjun. Energy Minimization Method for Scattered Data Hermite Interpolation [J]. Applied Numerical Mathematics, 2008, 58: 646 - 659.
- [10] LAI Mingjun. Multivariate splines for data fitting and approximation, Approximation Theory XII [M]. San Antonio, 2007, edited by M Neamtu and L L Schumaker, Brentwood: Nashboro Press, 2008: 210 - 228.
- [11] KERSEY S, LAI Mingjun. Convergence of local variational spline interpolation [J]. J Math Anal Appl, 2008, 341: 398 - 415.
- [12] CHEN G, LAI M J. Wavelets and Splines: Athens, 2005 [M]. Brentwood: Nashboro Press, 2006.

Interpolation for Space Scattered Data by Bicubic Polynomial Natural Splines

GUAN Lu-tai¹, XU Wei-zhi¹, ZHU Qing-yong²

(1. Department of Scientific Computing and Computer Application, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

(2. Ocean Engineering Research Centre, School of Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510175, China)

Abstract: Bicubic splines interpolate for space scattered data such that the integral of square of partial derivative of two orders to x and to y for the interpolating function is minimal (with natural boundary conditions). The solution is constructed as the sum of a bilinear polynomial and piecewise bicubic polynomials by Hilbert space spline function methods. Its coefficients can be decided by a linear system. The coefficient matrix is so symmetry that the LDL^T method can be succeeded. Results are very simple and can be achieved easily in computer programs.

Key words: scattered data interpolation; bicubic polynomial; natural splines